Aluno	Data	Curso / Turma	Professor
	24/10/09	**Engenharia Industrial Mecânica / 2006-1**	*Everton Farina, Eng.º*

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS

1.1 - INTRODUÇÃO

Inicialmente é necessário que se defina o que é sistema, sistema dinâmico e sistema estático. Um SISTEMA é uma combinação de componentes que atuam em conjunto para satisfazer um objetivo especificado. O sistema é dito ESTÁTICO*,* quando a saída atual do sistema depende somente da entrada atual. A saída do sistema só varia se a sua entrada variar.

O sistema é dito DINÂMICO, se a sua saída depende da entrada e dos valores passados da entrada. Num sistema dinâmico a saída varia se ela não estiver num ponto de equilíbrio, mesmo que nenhuma entrada esteja sendo aplicada.

O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como sendo o conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com uma certa precisão. O modelo matemático de um dado sistema não é único, isto é, um sistema pode ser representado por diferentes modelos dependendo da análise que se deseja fazer.

Na obtenção do modelo matemático para um dado sistema deve-se ter um compromisso entre a simplicidade do modelo e a sua precisão. Nenhum modelo matemático, por mais preciso que seja, consegue representar completamente um sistema.

Em geral deve-se obter um modelo matemático, que seja adequado para solucionar o problema específico que esta em análise. Porém, é importante ressaltar que os resultados obtidos desta análise serão válidos somente para os casos em que o modelo é válido.

Quando vamos obter um modelo simplificado de um sistema, geralmente ignoramos algumas propriedades físicas deste sistema. Se os efeitos que estas propriedades causam na resposta do sistema são pequenos, então uma boa semelhança entre os resultados da análise matemática e os resultados práticos do sistema é obtido.

Em geral os sistemas dinâmicos são não lineares. Porém, os procedimentos matemáticos para a obtenção de solução de modelos lineares são muito complicados. Por isto, geralmente substituí-se o modelo não linear por um modelo linear, com validade somente em uma região limitada de operação, ou para um ponto de operação.

A obtenção dos modelos que representam um dado sistema, são baseados nas leis que regem aquele sistema. Por exemplo, na modelagem de um sistema mecânico, deve-se ter em mente as leis de Newton; na modelagem de sistemas elétricos deve-se ter em mente as leis das correntes e das tensões de Kirchoff; na modelagem de sistemas térmicos deve-se ter mente as leis que regem os fenômenos térmicos, isto é, condução, radiação e convenção, etc...

Neste capítulo, nos preocupamos com a modelagem de sistemas mecânicos de translação e rotação e sistemas eletromecânicos. A modelagem de outros sistemas físicos, tais como, sistemas térmicos e sistemas hidráulicos não serão objeto de análise.

1.2 - MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

Os sistemas mecânicos são divididos em dois grupos, isto é, sistemas mecânicos de translação, e sistemas mecânicos de rotação. A seguir, alguns conceitos importantes relativos a sistemas mecânicos, serão revisados.

- Massa

A massa de um corpo, é a quantidade de matéria deste corpo, a qual é constante. Fisicamente, a massa de um corpo é responsável pela inércia do mesmo, isto é, a resistência à mudança de movimento de um corpo. O peso de um corpo é a força com a qual a terra exerce atração deste corpo.

$$m = \frac{\omega}{g}$$

Onde:

m é massa (Kg)
ω é o peso (Kgf)
g é a aceleração da gravidade ($\approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$)

Embora o peso de um corpo possa variar de um ponto para outro, a massa do mesmo não varia.

- Força

A força é definida como a causa que tende a produzir uma mudança na posição de um corpo, no qual a força está atuando. As forças podem ser classificadas de duas formas, FORÇAS DE CONTATO e FORÇAS DE CAMPO. As forças de contato são aquelas que têm um contato direto com o corpo, enquanto as forças de campo não apresentam contato direto com o corpo, como por exemplo, força magnética e força gravitacional.

- Torque

O torque é definido como qualquer causa que tende a produzir uma mudança na posição angular (rotacional) de um corpo, no qual o torque esteja atuando.

- Deslocamento, Velocidade e Aceleração

O deslocamento $\chi(t)$ é a troca de posição de um ponto, tomado como referência, para outro.

A velocidade é a derivada temporal do deslocamento $\chi(t)$.

$$\vartheta(t) = \frac{d\chi(t)}{dt} = \dot{\chi}(t)$$

A aceleração é a derivada temporal da velocidade:

$$a(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{d^2\chi(t)}{dt^2} \quad \therefore \quad a(t) = \dot{\vartheta}(t) = \dot{\chi}(t)$$

- Deslocamento Angular, Velocidade Angular e Aceleração Angular

O deslocamento angular "$\theta(t)$", é definido como a troca de posição angular, sobre um eixo, de um ângulo tomado como referência e outro. É medido em radianos. A direção anti-horária é tomada como positiva.

A velocidade angular "$\omega(t)$", é a derivada temporal do deslocamento angular "$\theta(t)$".

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$

A aceleração angular "$\alpha(t)$", é a derivada temporal da velocidade angular "ω".

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad \therefore \quad \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t)$$

Obs:

Se a velocidade ou a velocidade angular é medida em relação a uma referência fixa, então chamamos de velocidade absoluta ou velocidade angular absoluta. Caso contrário serão grandezas relativas. O mesmo é válido para a aceleração.

LEIS DE NEWTON

Das três leis que foram formuladas por Newton, a segunda lei é a mais importante, para a obtenção de modelos matemáticos de sistemas mecânicos.

- Segunda lei de Newton (Translação)

"A aceleração adquirida por de qualquer corpo rígido é diretamente proporcional as forças que atuam neste corpo, e inversamente proporcional a massa deste corpo".

$$\boxed{\sum \text{forças} = m.a}$$

- Segunda lei de Newton (Rotação)

"A aceleração angular de qualquer corpo rígido é diretamente proporcional aos torques que atuam neste corpo, e inversamente proporcional ao momento de inércia deste corpo".

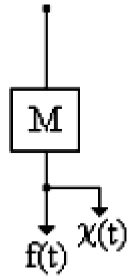
$$\boxed{\Sigma T = J\alpha}$$

Onde: J $\rightarrow$ Momento de inércia;

1.2.1- SISTEMAS MECÂNICOS DE TRANSLAÇÃO

Nos sistemas mecânicos de translação, há três elementos mecânicos envolvidos que são: elemento de inércia, elemento de amortecimento, elemento de elasticidade.

- Elemento de Inércia (Massa)



$$M \rightarrow \text{massa;}$$
$$f(t) \rightarrow \text{força aplicada;}$$
$$\chi(t) \rightarrow \text{deslocamento.}$$

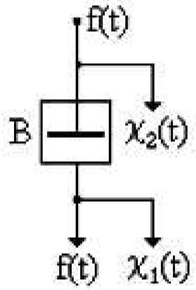
É assumido que a massa é rígida. Desta forma a conexão superior, não deve se mover em relação a conexão inferior, isto é, ambas conexões se deslocam segundo $\chi(t)$.

$$f(t) = M.a(t) = m\frac{d\vartheta(t)}{dt} = M\frac{d^2\chi(t)}{dt^2}$$

Onde:

$$a(t) \rightarrow \text{aceleração;}\ \ \vartheta(t) \rightarrow \text{velocidade;}\ \ \chi(t) \rightarrow \text{deslocamento.}$$

- Elemento de Amortecimento (Amortecedor)

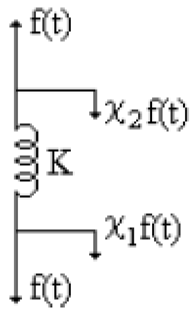


No caso deste elemento existe um deslocamento relativo entre o ponto de conexão superior e o ponto de conexão inferior. Portanto, existe a necessidade de duas variáveis deslocamento para descrever este elemento. A realização física deste elemento é a fricção viscosa associada ao óleo ou ar.

Força de Amortecimento $\boxed{f(t) = B\left(\frac{d\chi_1(t)}{dt} - \frac{d\chi_2(t)}{dt}\right)}$ $\quad f(t) = B(\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t))$

$$B \rightarrow \text{Coeficiente de amortecimento;}$$
$$\vartheta_1(t) \rightarrow \text{Velocidade relativa ao deslocamento } \chi_1(t)$$
$$\vartheta_2(t) \rightarrow \text{Velocidade relativa ao deslocamento } \chi_2(t).$$

- Elemento de Elasticidade (Mola)

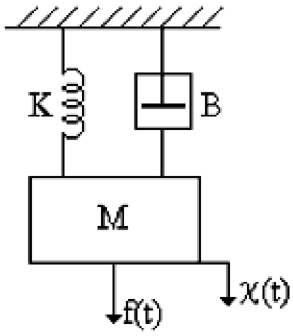


Este elemento pode ser deformado por uma força externa, tal que a deformação é diretamente proporcional a esta força.

$\boxed{f(t) = K(\chi_1(t) - \chi_2(t))}$ Força de elasticidade

Uma vez que os elementos mecânicos dos movimentos de translação estão definidos, as equações de sistemas mecânicos de translação podem ser escritas seguindo as leis de Newton.

Ex$_1$:



$$M\frac{d^2\chi(t)}{dt^2} = f(t) - B\frac{d\chi(t)}{dt} - K\chi(t)$$

Neste sistema, três forças exercem influências sobre a massa M: força aplicada f(t), a força de amortecimento e a força de elasticidade.

A função de transferência pode ser obtida, considerando-se a força aplicada como entrada e o deslocamento $\chi(t)$ como saída.

$$F(s) = MS^2X(s) + BSX(s) + KX(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{1}{MS^2 + BS + K} = \frac{1/M}{S^2 + \frac{B}{M}S + \frac{K}{M}}}$$

Ex$_2$:

Este sistema mecânico, é o modelo simplificado de um sistema de suspensão de uma das rodas de um automóvel,

onde:

Se observarmos a figura, existem 2 deslocamentos independentes $\chi_1(t)$ e $\chi_2(t)$. Isto significa que, conhecer o deslocamento $\chi_1(t)$ não implica em conhecer o deslocamento $\chi_2(t)$. Portanto deve se escrever 2 equações.

$$M_1\frac{d^2\chi_1(t)}{dt^2} = -K_1\left(\chi_1(t) - \chi_2(t)\right) - B\left(\frac{d.\chi_1(t)}{dt} - \frac{d.\chi_2(t)}{dt}\right) \qquad \text{“1”}$$

$$M_2\frac{d^2\chi_2(t)}{dt^2} = f(t) - K_1\left(\chi_2(t) - \chi_1(t)\right) - B\left(\frac{d\chi_2(t)}{dt} - \frac{d\chi_1(t)}{dt}\right) - K_2\chi_2(t) \qquad \text{“2”}$$

Supondo que deseja-se obter a função de transferência entre a força aplicada f(t) e o deslocamento do carro $\chi_1(t)$

$$M_1S^2X_1(s) = - K_1(X_1(s) - X_2(s)) - B(SX_1(s) - SX_2(s)) \qquad \text{“3”}$$

$$M_2S^2X_2(s) = F(s) - K_1(X_2(s) - X_1(s)) - B(SX_2(s) - SX_1(s)) - K_2X_2(s) \qquad \text{“4”}$$

Pela equação **"3"**; resulta $X_1(s)(M_1S^2 + K_1 + BS) = X_2(s)(K_1 + BS)$

$$\boxed{X_1(s) = \frac{BS + K_1}{M_1S^2 + BS + K_1}.X_2(s)} \qquad \text{“5”}$$

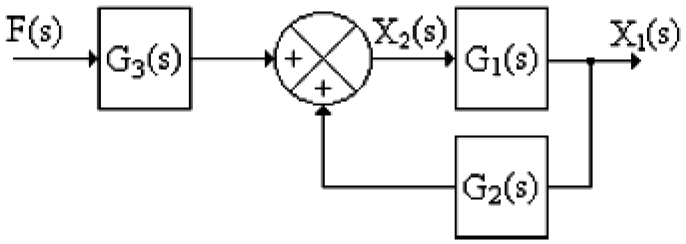
Pela equação **"4"**, resulta $X_2(s)(M_2S^2 + K_1 + K_2 + BS) = F(s) + (K_1 + BS)X_1(s)$

$$\boxed{X_2(s) = \frac{1}{M_2S^2 + BS + K_1 + K_2}.F(s) + \frac{BS + K_1}{M_2S^2 + BS + K_1 + K_2}X_1(s)} \qquad \text{“6”}$$

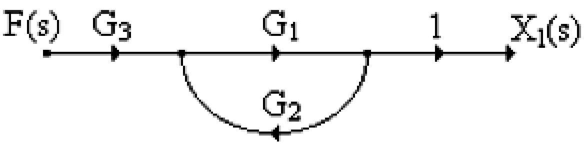
$$\boxed{X_1(s) = G_1(s).X_2(s)} \qquad \text{“5”}$$

$$\boxed{X_2(s) = G_2(s).X_1(s) + G_3(s).F(s)} \qquad \text{“6”}$$

As equações **"5"** e **"6"** fornecem as seguintes representações:



⇒ Diagrama de blocos



⇒ Gráficos de fluxo de sinais

Caminho direto: $M_1 = G_1.\ G_3$

Laços individuais: $La = G_1.\ G_2$

Determinante do sistema: $\Delta = 1 - G_1G_2$

Função de transferência: $\dfrac{X_1}{F} = \dfrac{G_1G_3}{1 - G_1G_2}$

Onde:

$$G_1G_2 = \frac{BS + K_1}{\left(M_1S^2 + BS + K_1\right)}.\frac{BS + K_1}{\left(M_2S^2 + BS + K_1 + K_2\right)}$$

$$G_1G_3 = \frac{BS + K_1}{\left(M_1S^2 + BS + K_1\right)}.\frac{1}{\left(M_2S^2 + BS + K_1 + K_2\right)}$$

Com isto, a função de transferência deste sistema é dada por:

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{\dfrac{BS+K_1}{\cancel{(M_1S^2+BS+K_1).(M_2S^2+BS+K_1+K_2)}}}{\dfrac{(M_1S^2+BS+K_1)(M_2S^2+BS+K_1+K_2)-(BS+K_1)^2}{\cancel{(M_1S^2+BS+K_1)(M_2S^2+BS+K_1+K_2)}}}$$

$$\boxed{\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{BS+K_1}{M_1M_2S^4+(M_1+M_2)BS^3+(M_1K_1+M_1K_2+M_2K_1)S^2+BK_2S+K_1+K_2}}$$

Esta função de transferência descreve completamente, a dinâmica do sistema apresentado.

Uma vez conhecido, a massa do carro "M_1", massa da roda "M_2" e a elasticidade do pneu "K_2", a suavidade ou conforto do carro é determinado pela definição dos valores de K_1 e B.

(B $\rightarrow$ amortecedor; K1 $\rightarrow$ mola).

Como o coeficiente de amortecimento B varia com o desgaste do amortecedor, a função de transferência também varia com o tempo mudando o conforto do carro.

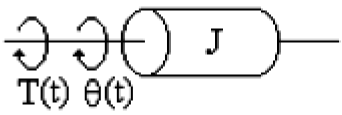
1.2.2- SISTEMAS MECÂNICOS DE ROTAÇÃO

$\Rightarrow$ Diagrama de blocos

$\Rightarrow$ Gráficos de fluxo de sinais

Os elementos mecânicos envolvidos nos sistemas mecânicos de rotação são os mesmos já definidos para os sistemas mecânicos de translação. A diferença é que agora os deslocamentos são angulares.

- Elementos de inércia (Momento de Inércia)



$$T(t) = J\alpha(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad \therefore \quad \boxed{T(t) = J\ddot{\theta}(t)}$$

Onde:

$J \rightarrow$ Momento de inércia;

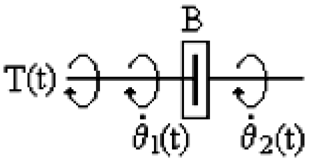
$T(t) \rightarrow$ Torque aplicado;

$\theta(t) \rightarrow$ Deslocamento angular.

$\alpha(t) \rightarrow$ Aceleração angular;

$\omega(t) \rightarrow$ Velocidade angular.

- Elemento de Amortecimento (Amortecedor)



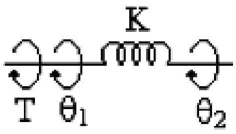
$$\boxed{T(t) = B\left(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)\right)}$$

$\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) =$ Velocidade Relativa;

$T =$ Torque aplicado;

$B =$ Coef. de amortecimento Rotacional.

- Elemento de Elasticidade (Mola)



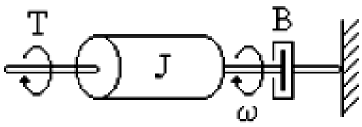
$$\boxed{T(t) = K\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right)}$$

$T(t) =$ Torque aplicado;

$\theta_1(t) - \theta_2(t) =$ Desloc. angular relativo.

Exemplos:

1) Considere o sistema mecânico rotacional, mostrado a seguir:

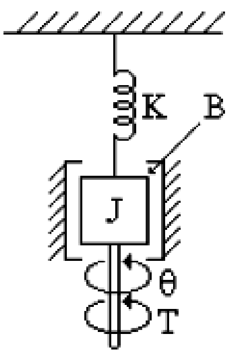


$$J\alpha(t) = \sum T(t)$$
$$J\dot{\omega}(t) = T(t) - B\omega(t)$$
$$T(t) = J\dot{\omega}(t) + B\omega(t)$$

Aplicando T.L, resulta: $T(s) = JS.\Omega(s) + B.\Omega(s)$

$$\boxed{\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{J.S + B}}$$

2) Considere o sistema mecânico rotacional, mostrado a seguir:



Este sistema é um exemplo de relógios de pêndulo. O momento de Inércia do pêndulo, é representado por J; a fricção entre o pêndulo e o ar é representado por B, e a elasticidade do pêndulo é representada por K.

$$J\alpha(t) = \sum T(t)$$

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = T(t) - B\frac{d\theta(t)}{dt} - K\theta(t)$$

Aplicando T.L, resulta:

$$J.S^2\theta(s) = T(s) - BS.\theta(s) - K.\theta(s)$$

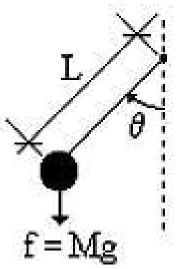
A função de transferência, será então:

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J.S^2 + B.S + K}}$$

1.3- LINEARIZAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS NÃO-LINEARES

Conforme já foi comentado anteriormente, os modelos mais precisos de sistemas físicos são não-lineares. Entretanto, a transformação de Laplace não pode ser utilizada na solução de equações diferenciais não-lineares. Por isto, é necessário que seja introduzida uma técnica de linearização de sistemas não-lineares.

Seja o sistema de um pêndulo mostrado abaixo:

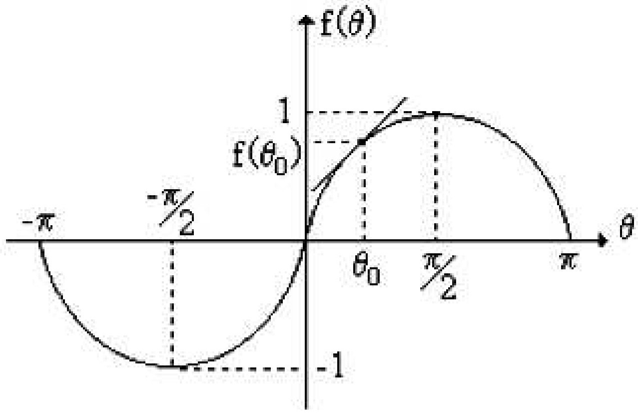


L → comprimento do pêndulo;
M → massa do pêndulo;
f → força que atua no pêndulo;
g → gravidade.

A equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo, é:

$$\frac{L}{g}.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = - \ \text{sen} \ \theta(t)$$

Esta equação é não linear, devido a presença do termo sen θ(t). A característica não-linear para a função f(θ) = sen θ é mostrada abaixo.



O procedimento usual de linearização é substituir a característica da função por uma linha reta, o que fornece uma precisão razoável para uma pequena região de operação. Por exemplo, suponha que deseja-se linearizar a função f(θ) = sen θ em torno do ponto f(θ_0). Através de expansão em Série de Taylor, representa-se a função f(θ) em torno do ponto "θ_0", por:

$$f(\Theta) = f(\Theta_0) + \left.\frac{df}{d\Theta}\right|_{(\Theta=\Theta_0)} .(\Theta - \Theta_0) + \left.\frac{d^2 f}{d\Theta^2}\right|_{(\Theta=\Theta_0)} .\frac{(\Theta-\Theta_0)^2}{2!} + \ldots\ldots \qquad \text{"2"}$$

Se a variação "$\theta - \theta_0$" é pequena, os termos de maior grau podem ser desprezados na série de Taylor. Isto resulta em:

$$f(\theta) \cong f(\theta_0) + \left.\frac{df}{d\theta}\right|_{(\theta=\theta_0)} . (\theta - \theta_0) \qquad \textbf{“3”}$$

Seja portanto: $f(\theta) = \text{sen}\,\theta$. Com isto temos:

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta_0 + \{\cos\theta_0\}.(\theta - \theta_0) \qquad \textbf{“4”}$$

Como, o pêndulo mostrado, opera na região em que $\theta = 0^0$, pode-se linearizar a função em torno do ponto $\theta_0 = 0^0$.

$$\text{sen}\,\theta \cong 0 + 1.(\theta - 0^0) \;\therefore\; \boxed{\text{sen}\,\theta \cong \theta} \qquad \textbf{“5”}$$

Substituindo **"5"** em **"1"**, resulta:

$$\frac{L}{g}.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\theta(t) \qquad \textbf{“6”}$$

ou

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad \textbf{“7”}$$

Portanto, para linearizar uma função $f(\chi)$ em torno do ponto "χ_0", deve-se$\Rightarrow$ expandir esta função através de Série de Taylor, considerando-se desprezível os termos $(\theta - \theta_0)^n$, $\Rightarrow$para $n > 1$.

$$f(\chi) = f(\chi_0) + \left.\frac{df(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\chi_0} (\chi - \chi_0)$$

A precisão, desta linearização depende da magnitude dos termos ignorados.